確率過程におけるlong-time tail

東大・理　　鈴 木 増 雄

動的臨界現象にとってもっとも基本的な現象である臨界緩和[1)~4)]について議論する。ここでは簡単のために，確率過程[5)]

$$\frac{dx}{dt}=f(x)+g(x)\eta(t);<\eta(t)\eta(t')>=2\varepsilon\delta(t-t'), \tag{1}$$

について考察する。$\eta(t)$はガウシャン・ランダムの力とする。εはその強さを表わす。$f(x)$のxに関する一次の係数γが零になるところを臨界点と呼ぶことにすると，そこでは一般に臨界緩和が起り，$<x(t)>$は，tの巾乗で減衰する。これを通常long time tailという。これは，$f(x)$と$g(x)$の関数形によって次のように分類される。

(i) 決定論的臨界緩和。本質的に$f(x)$だけによってlong-time tailの指数が決まる場合。

(ii) ノイズに誘起された臨界緩和。$f(x)$の効果と$g(x)\eta(t)$の効果が丁度打ち消し合って，その残りの弱いt-依存性によって，dx/dtの振舞いが決まる場合。これは，ノイズ$\eta(t)$が無いと起らない現象であり，$f(x)$の項も重要であると同時にノイズの効果も同様に大切な場合である。

(iii) 限界的な臨界緩和。dx/dtも$f(x)$も$g(x)\eta(t)$も同程度にスケールされて臨界緩和が決まる場合。

(iv) ノイズだけで起る臨界緩和。$g(x)\eta(t)$の項だけで，漸近的に$x(t)$の緩和が決まる場合。

以上の４つの場合をもっと具体的にみるには，$f(x)$，$g(x)$をxの巾級数で展開し，もっとも効く項を残して$f(x)=\gamma x-gx^m$ $(m>1)$，$g(x)=x^n$とおく。すると，スケーリングの方法[6)]すなわち，$[Q(t)]$によって$Q(t)$のtに関するもっとも強い巾乗の項を表わすことにすると，臨界点$\gamma=0$では，$[gx^m]$と$[x^n\eta(t)]$の比較によって，mとnの値に応じて，上の４つの場合に分類される。まず，$[\eta(t)]=t^{-1/2}$に注意し，$x(t)\sim t^{-\alpha}$と仮定すると，$[dx/dt]\sim t^{-\alpha-1}$; $[gx^m]\sim t^{-m\alpha}$，$[x^n\eta(t)]\sim t^{-n\alpha-1/2}$であるから，$2n>m+1>2$では，(i)の場合になり，$\alpha=1/(m-1)$と求まり，$m+1>2n$，$m>n$では，(ii)の場合になり，$\alpha=1/[2(m-n)]$となり，$m+1=2n$では，(iii)の場合になり，$\alpha=1/[2(n-1)]$となる。例えば，$dx/dt=\gamma x-gx^m+x\eta(t)$は，(ii)の場合になる。[7),8)]

臨界指数を問題にしないで，臨界緩和が起るかどうかだけを問題にするならば，次の一般的

判定条件[7]が役に立つ：臨界緩和が起るためには，少なくとも一つの物理量 Q が臨界点で $\langle Q \rangle_{\mathrm{st}} = \pm\infty$ となるか，定常分布 $P_{\mathrm{st}}(x)$ または，初期分布 $P_{\mathrm{ini}}(x)$ が臨界点のところで異常性を示すことが必要である。（異常性とは，規格出来なくなるか，デルタ関数になることをいう。）

或いは，上のランジュバン方程式(1)をFokker-Planckの方程式になおし，それをSchrodinger－型[8]に変換し，そのポテンシャルの様子から，$\gamma \to 0$ で，零振動数のモードが連続的に現れるかどうかにより，long-time tailの出現の可否を議論することができる。[8]

具体的な例として，上にあげたように，

$$\frac{d}{dt}x = \gamma x - g x^m + x\eta(t) \tag{2}$$

を考える。[5), 9)〜11)] 最近 Brenig と Banai [7] はCarlemanの方法を用いて，(2)を厳密に解き，$m=3$ のとき，臨界点 $\gamma=0$ で，$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{-1/2}$ のような漸近形を持つことを示した。これは，case (ii)の，ノイズで誘起された臨界緩和の典型的な例になっている。実は，文献11)にも指摘した通り，(2)は形式的に次のように解が厳密に求まる：

$$x(t) = \frac{x_0 \exp(\gamma t + W(t))}{\left[1 + g x_0^{m-1}(m-1)\int_0^t \exp\{(m-1)(\gamma t' + W(t'))\}\,dt'\right]^{1/(m-1)}} \tag{3}$$

但し，$W(t) = \int_0^t \eta(t')\,dt'$，$x_0 \equiv x(0)$. この形式解は言わば，経路積分で与えたようなもので，ランダム経路 $\{\eta(t)\}$ に関する平均を行って，$\langle x^p(t) \rangle$ を求めるのが困難である。長い間，(3)の形式解は，役に立たないものと思われていたが，最近，$\langle x^p(t) \rangle$ が顕わにきちんと計算できることがわかった。それには，次の公式を用いればよい：

$$\begin{aligned} I_n(t;a,b;a_0,b_0) &\equiv \left\langle e^{a_0 t + b_0 W(t)} \left(\int_0^t e^{at' + bW(t')}\,dt'\right)^n \right\rangle \\ &= e^{a_0 t + \varepsilon b_0^2 t} \times \frac{(-1)^n}{b^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{(\alpha+2k)\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k+n+1)} \exp\left[k\{(a+2\varepsilon b_0 b) + b^2 \varepsilon k\} t\right] \end{aligned} \tag{4}$$

但し，$\alpha \equiv (a + 2\varepsilon b_0 b)/(b^2 \varepsilon)$. この公式は，$W(t)$ のガウシャンの性質を利用して，数学的帰納法で証明できる。この公式を用いると，(3)の $x(t)$ に対して $\langle x^p(t) \rangle$ が顕わに超幾何関数を用いて表わすことができ，その結果，上に与えた現象論の結果が検証される。詳しくは，他の一般的な公式と共に近く公表する予定である。[12]

文　　献

1) M. Suzuki and R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **24** (1968), 51.
2) H. Yahata and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **27** (1969), 1421.
3) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **43** (1970), 882.
4) M. Suzuki, Int. J. Mag. **1** (1971), 123. See also
M. Suzuki, and H. Ikeda, Prog. Theor. Phys. **55** (1976), 2041.
5) M. Suzuki, K. Kaneko and F. Sasagawa, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 828.
6) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 361.
7) L. Brenig and N. Banai, Physica D (in press).
8) M. Suzuki and K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. (submitted).
9) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev. **20A** (1979). 1628.
10) Y. Hamada, Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 1127; **65** (1981), 850.
11) M. Suzuki, Adv. Chem. Phys. **46** (1981), 195.
12) M. Suzuki, J. Math. Phys.

転移点以下でのXYモデルの流体力学について

名大・理　　白田理一郎，三宅和正，伊藤正和，山田一雄

XYモデルの秩序相においては，オーダーパラメーターであるX−Yスピン成分の連続的な対称性は破れる。この時オーダーパラメーターの横成分σ_Tは南部・Goldstoneモードであり，動的にはスピン波のモードとして特長づけられる。このスピン波は，超流動ヘリウムの流体力学である2流体モデルを基礎とした考えに従えば，σ_Tと保存量であるσ_Zの2変数で記述できると考えられる。しかし，そもそも外場H_Zが存在する場合，σ_Zの対称性が破れることにより，オーダーパラメーターの縦成分であるσ_Lもσ_Tとσ_Zの運動に関与して来る。Halperinと Hohenbergは直観的にσ_L，σ_T，σ_Zの3変数についての運動方程式を以下のように書き下して，スピン波の分散関係を調べた[1]。

$$\partial\sigma_L(k)/\partial t = -\frac{1}{\tau_k}\left[\sigma_L(k) - \sigma_L^{\,0}(k)\right] \tag{1.a}$$

$$\partial\sigma_Z(k)/\partial t = -gM\tilde{\rho}_S\, k^2\,\sigma_T(k) - \frac{\lambda}{\chi_Z}\, k^2\,\sigma_Z(k) \tag{1.b}$$